工程电磁场

王泽忠

宇宙： “上下四方曰宇，

往古来今曰宙。”

时空：时间，空间

坐标系：直角坐标系、

圆柱坐标系、

球坐标系

1 矢量分析与场论基础

本章提示：

- 矢量分析和场论是重要数学工具
- 矢量函数的微分与积分的运算规则
- 场的基本概念
- 导出标量场的等值面方程
- 矢量场的矢量线方程
- 源点和场点及其相互关系
- 平行平面场和轴对称场
- 标量函数方向导数，梯度的定义

- 直角坐标系梯度计算公式和梯度运算规则
- 矢量函数通量，散度的定义
- 直角坐标系散度计算公式和散度运算规则
- 散度定理
- 矢量函数环量和环量面密度概念，旋度的定义
- 直角坐标系中旋度计算公式和旋度运算规则
- 斯托克斯定理
- 哈米尔顿算子的定义和运算规则
- 格林定理和亥姆霍兹定理
- 三种常用坐标系中有关的计算公式

重点：

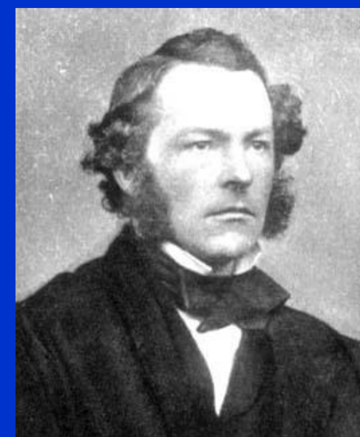
梯度、散度和旋度

定义、计算公式和运算规则

散度定理、斯托克斯定理

格林定理、亥姆霍兹定理

高斯



斯托克斯

亥姆霍兹

1.1 矢量分析公式

1. 矢量代数公式

1）标量、矢量和单位矢量

标量

矢量

矢量的模

单位矢量，用 $\boldsymbol{e}$ 表示。如 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$

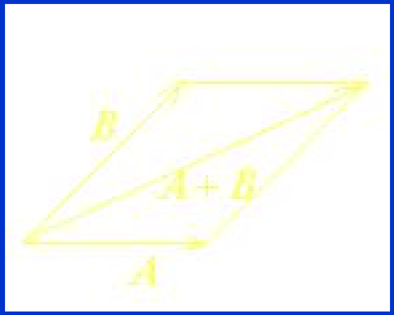
矢量写成 $\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{e}_A$

直角坐标系中写成 $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$

矢量平移

2）矢量的加减法

$$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y + A_z \boldsymbol{e}_z$$



$$\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{e}_x + B_y \boldsymbol{e}_y + B_z \boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = \left(A_x \pm B_x\right)\boldsymbol{e}_x + \left(A_y \pm B_y\right)\boldsymbol{e}_y + \left(A_z \pm B_z\right)\boldsymbol{e}_z$$

矢量加法的四边形法则和三角形法则

3）矢量的数乘

$$\lambda \boldsymbol{A} = \lambda A_x \boldsymbol{e}_x + \lambda A_y \boldsymbol{e}_y + \lambda A_z \boldsymbol{e}_z \quad ; \qquad \lambda \text{ 为实数}$$

4）矢量的点积

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = AB\cos\theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

θ 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 、 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角

$B\cos\theta$ 是矢量 $\boldsymbol{B}$ 在矢量 $\boldsymbol{A}$ 方向上的投影

$A\cos\theta$ 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在矢量 $\boldsymbol{B}$ 方向上的投影

矢量的点积是标量

$\theta = 0^\circ$， $\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B} = AB$

$\theta = 90^\circ$， $\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B} = 0$

两个矢量相互垂直

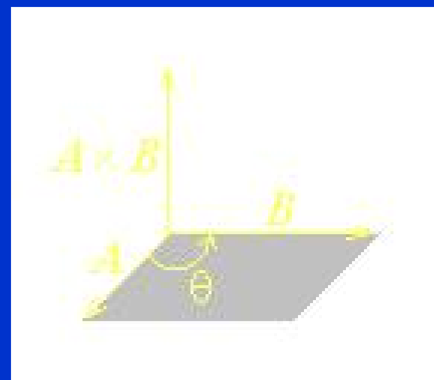
运算：　$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\bullet\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{C}\bullet\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right) = \boldsymbol{C}\bullet\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\bullet\boldsymbol{B}$$

$$\left(\lambda\boldsymbol{A}\right)\bullet\left(\mu\boldsymbol{B}\right) = \lambda\mu\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}$$ ；　λ,μ 为实数

$$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^2 = AA = A^2$$

5）矢量的叉积

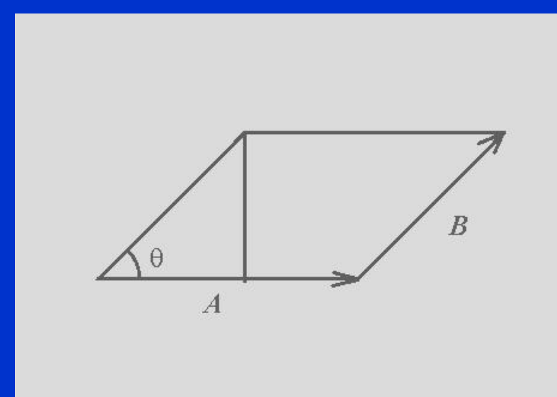


$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=AB\sin\theta\boldsymbol{e}_n$$

$$=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\boldsymbol{e}_x+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)\boldsymbol{e}_y$$

$$+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$



$\boldsymbol{e}_n$ 是与矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都垂直的单位矢量

$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{e}_n$ 构成右手螺旋关系

$\boldsymbol{A}$ 方向旋转到 $\boldsymbol{B}$ 方向为逆时针旋转 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 朝前

$\boldsymbol{A}$ 方向旋转到 $\boldsymbol{B}$ 方向为顺时针旋转 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 朝后

θ 是矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 之间的夹角

平行四边形的面积就是 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的模

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ 方向相反

矢量的叉积是矢量

$\theta = 0^\circ$，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = 0$；$\theta = 90^\circ$，$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B} = AB\boldsymbol{e}_n$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}\right)\text{；}\qquad \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = 0$$

6）矢量的混合积

$$\boldsymbol{A}\bullet\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\right)=\boldsymbol{B}\bullet\left(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{C}\bullet\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)$$

$$\boldsymbol{A}\times\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\right)=\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{C}\right)-\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}\right)$$

2．矢量函数的导数和微分公式

自变量为空间坐标的情况在场论中讨论

自变量 t 为非空间坐标量，可理解为时间量

1） $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_x+\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_y+\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_z$$

2） $\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\mathrm{d}A_x\boldsymbol{e}_x+\mathrm{d}A_y\boldsymbol{e}_y+\mathrm{d}A_z\boldsymbol{e}_z$

3） $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}t}=0$；　　$\boldsymbol{C}$ 是常矢量（不随时间变化）

4） $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}$

5） $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(k\boldsymbol{A}\right)=k\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$；　　k **是常数（不随时间变化）**

6） $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u\boldsymbol{A}\right)=u\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}$

7） $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}\right)=\boldsymbol{A}\bullet\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\bullet\boldsymbol{B}$

8） $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)=\boldsymbol{A}\times\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B}$

9）设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(u),\ u=u(t)$，　$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

3．矢量函数的积分公式

自变量 t 为非空间坐标量，可理解为时间量

1）

$$\int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$$

$$=[\int A_x(t)\mathrm{d}t]\boldsymbol{e}_x+[\int A_y(t)\mathrm{d}t]\boldsymbol{e}_y+[\int A_z(t)\mathrm{d}t]\boldsymbol{e}_z$$

$$=B_x(t)\boldsymbol{e}_x+B_y(t)\boldsymbol{e}_y+B_z(t)\boldsymbol{e}_z$$

$$+C_x\boldsymbol{e}_x+C_y\boldsymbol{e}_y+C_z\boldsymbol{e}_z$$

$B_x(t),B_y(t),B_z(t)$ 是 $A_x(t),A_y(t),A_z(t)$ **的原函数**

C_x,C_y,C_z **是任意常数（不随时间变化）**

2） $\int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{B}(t) + \boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{B}(t)$ 是 $\boldsymbol{A}(t)$ 的原函数

$\boldsymbol{C}$ 是任意常矢量（不随时间变化）

3） $\int [\boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{B}(t)]\mathrm{d}t = \int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t + \int \boldsymbol{B}(t)\mathrm{d}t$

4） $\int k\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = k\int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$； k 是常数

5） $\int \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{C} \cdot \int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$； $\boldsymbol{C}$ 是常矢量

6） $\int \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{C} \times \int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$； $\boldsymbol{C}$ 是常矢量

1.2 场的基本概念和可视化

1. 场的基本概念

空间中点对应着物理量的值就确定了该物理量的场

场中的每一点都对应着一个物理量—场量的值

标量场，如温度场、能量场、电位场等

矢量场，如速度场、力场、电场和磁场等

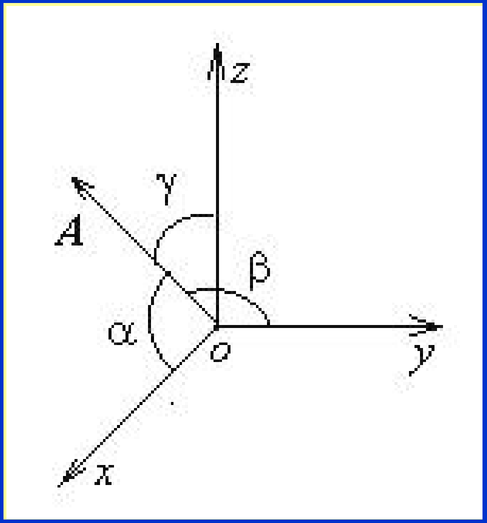
场点， 在直角坐标系中由 x, y, z 确定

标量场和矢量场表示式为

$$u(\mathrm{M}) = u(x, y, z)\text{；}\quad \boldsymbol{A}(\mathrm{M}) = \boldsymbol{A}(x, y, z)$$

矢量函数 A(M) 的坐标表示式可写成

$$A(\mathrm{M})=A_x(x,y,z)\boldsymbol{e}_x+A_y(x,y,z)\boldsymbol{e}_y+A_z(x,y,z)\boldsymbol{e}_z$$



函数 A_x , A_y , A_z 为矢量函数 A 在直角坐标系

坐标轴上的投影，为标量函数

$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ 为 x 轴、y 轴、z 轴正方向的单位矢量

用矢量与三个坐标轴的夹角表示

α，β，γ 为矢量 A 与 x, y, z 之间的夹角，

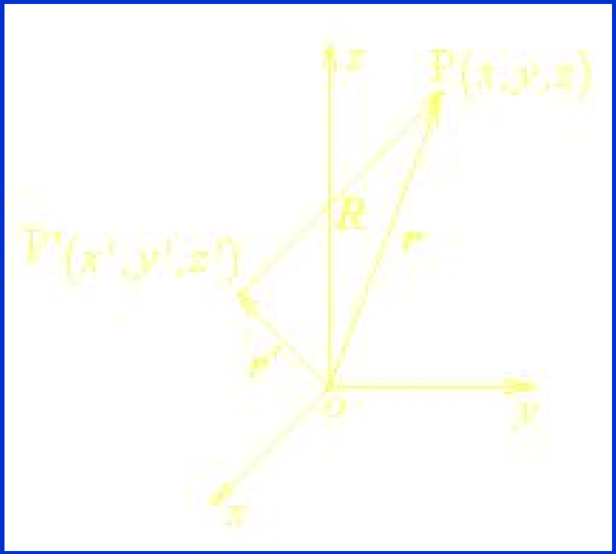
方向角；$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为方向余弦

$$\boldsymbol{A}(\mathrm{M}) = A\cos\alpha\boldsymbol{e}_x + A\cos\beta\boldsymbol{e}_y + A\cos\gamma\boldsymbol{e}_z$$

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A};\quad \cos\beta = \frac{A_y}{A};\quad \cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$

方向余弦，单位矢量在坐标轴的投影

2. 源点与场点



场源所在的空间位置称为源点

源点 P′ 用 x', y', z' 表示；也可用位置矢量 $\boldsymbol{r}'$ 表示

场点P 用 x, y, z 表示；也以用位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 表示

从源点到场点的距离矢量用 $\boldsymbol{R}$ 表示

$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ ；矢量 $\boldsymbol{R}$ 的模 $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$

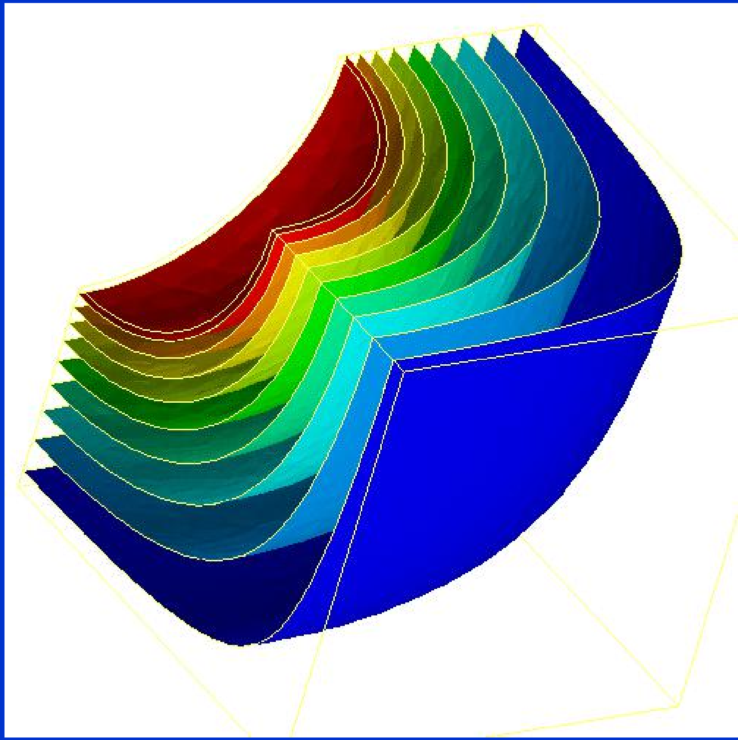
单位矢量 $\boldsymbol{e}_R = \dfrac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$

场点和源点重合时， $R = 0$

$\boldsymbol{R}$ 是非常重要的矢量；它联系着源点与场点

决定着场量与场源之间的空间关系

3．标量场的等值面



设标量场 $u(\mathrm{M})$ 是空间的连续函数

对空间任何一点 M_0 可作出一个曲面 S

在它上面每一点处，函数 $u(\mathrm{M})$ 的值都等于 $u(\mathrm{M}_0)$

曲面 S 叫做标量场 u 的等值面；方程为

$$u(x,y,z)=C$$

C 为常数（不随空间位置变化）

给定 C 的一系列不同的数值

可得到一系列的等值面，称为等值面族

等值面族可以充满整个标量场所在的空间。

等值面互不相交；惟一性

一般将每两相邻等值面场量值之差设为相同的定值

可根据等值面的稀密程度观察场量的空间分布

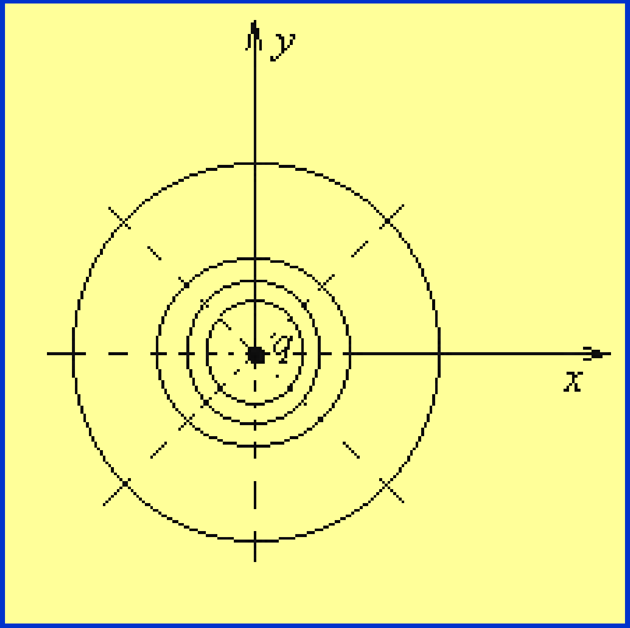
电场中的电位场是一个标量场；等电位面

在坐标原点放置一个点电荷 q

等位面方程为

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = C$$ ；解得

$$r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 C}$$



球面的方程； 按一定递增量 $C_1, C_2, \cdots\cdots,$

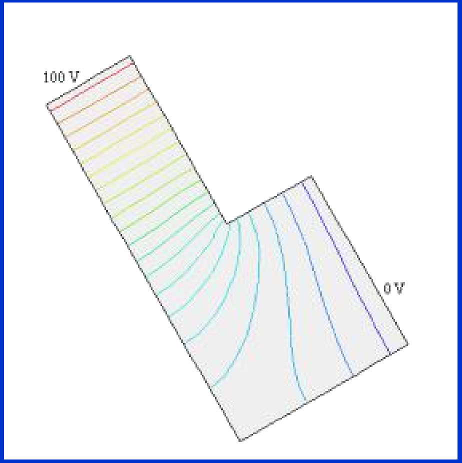
得到一族同心球面

标量场的等值面与一给定平面相交

得到标量场在该平面上的等值线

$u(x,y,z)$ 在 $x-y$ 平面上的等值线方程为

$$u(x,y)=C$$



C 为常数（不随空间位置变化）

3．矢量场的矢量线

对于矢量场，可用矢量线来表示其分布

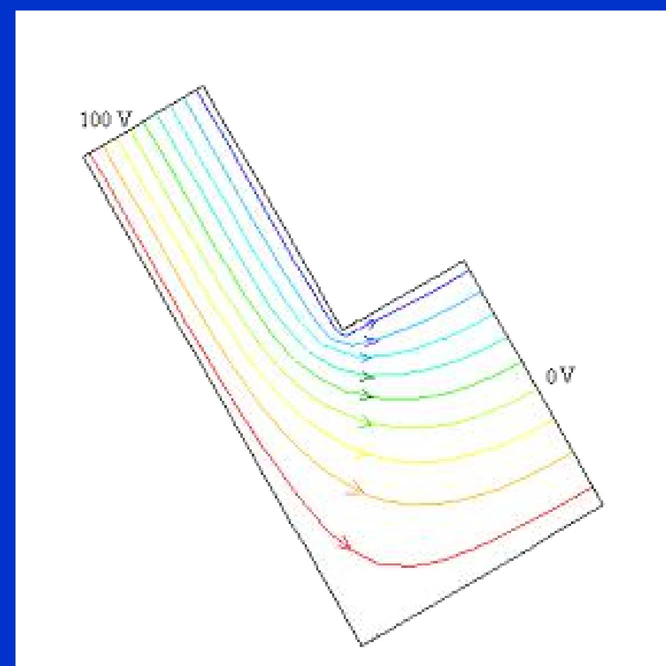
矢量线的切线方向与场矢量方向相同

矢量线反映了场矢量在线上每一点的方向

矢量场中每一点有一条矢量线通过

矢量线应是一族曲线，可以充满空间

矢量线的密度反映矢量的大小



已知场矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x,y,z)$，求矢量线的方程

设 M(x, y, z) 为矢量线 l 上的任一点，其矢径为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z \quad ,$$

则矢量微分

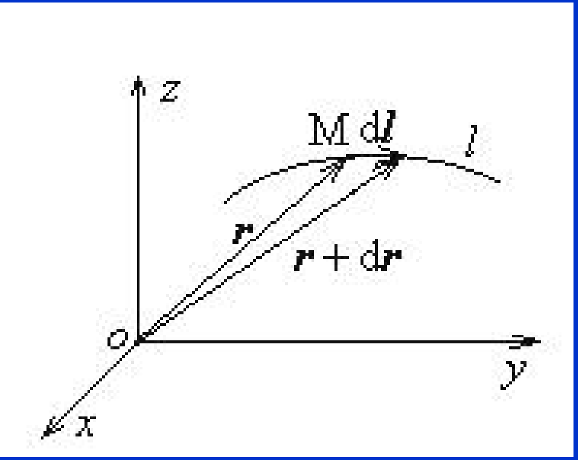
$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x+\mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y+\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z$$

在点 M 处与矢量线相切的矢量，按矢量线的定义

它必定在 M 点处与场矢量方向相同，场矢量为

$$\boldsymbol{A}=A_x(x,y,z)\boldsymbol{e}_x+A_y(x,y,z)\boldsymbol{e}_y+A_z(x,y,z)\boldsymbol{e}_z$$

因此有 $$\frac{\mathrm{d}x}{A_x}=\frac{\mathrm{d}y}{A_y}=\frac{\mathrm{d}z}{A_z}$$



这便是矢量线所满足的微分方程，其解为矢量线族

再利用过 M 点这个条件，

即可求出过 M 点的矢量线

因矢量线的切线方向与场矢量的方向相同，所以

$\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{A} = 0$；　即

$$\left(\mathrm{d}yA_z - A_y\mathrm{d}z\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\mathrm{d}zA_x - A_z\mathrm{d}x\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\mathrm{d}xA_y - A_x\mathrm{d}y\right)\boldsymbol{e}_z = 0$$

得：

$$\begin{cases} \mathrm{d}yA_z - A_y\mathrm{d}z = 0 \\ \mathrm{d}zA_x - A_z\mathrm{d}x = 0 \\ \mathrm{d}xA_y - A_x\mathrm{d}y = 0 \end{cases}$$

两种表述等价

画矢量线是有条件的（连续性）

4．场的其他可视化方法